Notes de recherche

Alexis Evaristo

9 septembre 2025

Résumé

Ces notes rassemblent les réflexions et résultats issus de mes travaux de recherche lors de mon stage de 1re année du cycle ingénieur à l'école Polytech Lille, au laboratoire CRIStAL. Elles ne prétendent pas à l'exhaustivité mais servent de base à une formalisation ultérieure.

Table des matières

1 Introduction

L'étude des équations différentielles polynomiales ordinaires (ou polynomial ordinary differential equations, PODEs) constitue un domaine central de l'analyse algébrique. L'algorithme de Denef–Lipshitz fournit une méthode constructive permettant de déterminer des solutions de telles équations sous forme de séries formelles à puissances entières (Formal Power Series, FPS). Cet outil a montré son efficacité dans de nombreux cas, mais il peut échouer à produire une solution, en particulier lorsque l'équation ne possède pas de solution formelle classique autour de l'origine.

Dans ce contexte, une question naturelle se pose : peut-on élargir l'espace des solutions en considérant des séries formelles plus générales, notamment les séries de Puiseux, c'est-à-dire les séries à puissances fractionnaires ? Ces séries prennent la forme

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n x^{n/s}, \quad a_n \in \mathbb{K},$$

et généralisent les FPS tout en restant manipulables algébriquement.

L'objectif de ce travail est d'explorer une méthode systématique pour détecter l'existence de telles solutions. On peut voir cela comme un algorithme dont : • l'entrée est un polynôme différentiel P(x) (éventuellement avec des conditions initiales), • et la sortie est une solution de P sous forme de série de Puiseux.

Deux idées viennent :

- Généraliser les *lemme 2.2 et 2.3* de Denef et Lipshitz pour des séries de Puiseux ;
- Trouver un changement de variable transformant P en un nouveau PODE Q qui admet une solution formelle classique ;

Dans la suite nous aborderons la seconde idée.

2 Formulation rigoureuse du problème

Considérons un polynome différentiel $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...)$ en la variable différentiel y, qui ne possède pas de solution en FPS, c'est à dire de la forme $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Nous cherchons alors à savoir s'il existe une solution en série de Puiseux, c'est à dire de la forme $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$ avec $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Pour cela nous cherchons à déterminer s'il existe un changement de varaible $t = f(x)$ de telle sorte à obtenir un nouveau polynome différentiel que l'on note $Q(t, z, \dot{z}, \ddot{z}, ...)$, qui lui admet une solution en FPS de la forme $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$. L'objectif est donc de savoir s'il existe un tel changement de variable et de comment le trouver.

Avant de continuer, il convient de fixer certaines notations qui seront utilisées dans la suite afin d'éviter les confusions. Pour une fonction quelquonque f en la variable x, on note $\dot{f} = \frac{df}{dx}$ qui ne faut pas confondre avec $\frac{df}{dt}$ qui correspond à la dérivée de f en la variable t. Attention se ne sont pas des dérivées partielles de f, il est possible de voir $\frac{df}{dt}$ comme un dérivée composée de f en la variable t, c'est à dire de la forme $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{f}\frac{dx}{dt}$.

Remarque 2.1. Remarquons que le problème est en réalité plus large que de simplement trouver une solution en série de Puiseux pour P, il est également possible d'imposer des conditions initiales à la solution recherchée, c'est-à-dire par exemple de trouver $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$ telle que $P(x, \bar{y}, \dot{\bar{y}}, \ddot{\bar{y}}, ...) = 0$ et $\bar{y}(0) = y_0$, $\dot{\bar{y}}(0) = y_1$, $\ddot{\bar{y}}(0) = y_2$, ... avec $y_0, y_1, y_2, ... \in \mathbb{R}$ fixés.

3 Cadre de travail et hypothèses

La suite des résultats est basée sur une hypothése assez forte, selon laquelle pour passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$, il est toujours possible de considérer un changement de variable de la forme $x^a = t^b$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq b$. Autrement dit, en reprenant la notation utilisée plus haut, $f(x) = x^{a/b}$.

Cette hypothèse est due à l'observation suivante, il existe d'autre changements de variables permettant de passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux, il est possible par exemple de considérer $t = x + x^{4/3}$. Après changement de variable, on obtient $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x + x^{4/3})^n$, développons pour $i \in 1, 2$: pour $i = 1$ la série possède les puissances de x suivantes $x + x^{4/3} = x^{3/3} + x^{4/3}$, et pour $i = 2$ la série fait apparaitre les puissances de x suivantes $(x + x^{4/3})^2 = x^2 + 2x^{7/3} + x^{16/9}$. Mettons maintenant toutes les puissances de x au même dénominateur : $x^{3/3} + x^{4/3} + x^2 + 2x^{7/3} + x^{16/9} = x^{9/9} + x^{12/9} + x^{16/9} + x^{18/9} + 2x^{21/9}$. Il vient que pour $i = 1$ la série obtenu était une série de Puiseux avec $s = 3$, et donc éventuellement un changement de forme $t = x^{1/3}$ aurait suffit. De même pour $i = 2$ la série obtenu serait une série de Puiseux avec $s = 9$, et on aurait un changement de forme $t = x^{1/9}$. Il est donc possible d'imaginer que l'on peut itérer pour $i > 2$, et continuer de se ramenner à un changement de variable de la forme $t = x^{a/b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq b$. Il est alors possible d'imaginer que l'on puisse généraliser avec des changements de variable de la forme $t = x^{q_1} + x^{q_2} + x^{q_3} + ...$, avec $q_1, q_2, q_3, ... \in \mathbb{Q}$.

Remarque 3.1. L'avantage du changement de variable $x^a = t^b$ est qu'il est inversible.

4 Exemple complet

Le mieux est de commencer avec un exemple complet de la méthode que je cherche à développer. Considérons maintenant le polynome $P(x, \dot{y}) = \dot{y}^2 - x$. (Un simple calcul integrale nous donne que $\bar{y}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_{const}$) C'est un exemple intéressant car simple et accessible avec des calculs relativement simple. Commençons par faire le changement de variable $t^b = x^a$, on obtient le polynome

$$Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2(\frac{a}{b})^2 t^{\frac{2(a-b)}{a}} - t^{\frac{b}{a}}$$

On se demande maintenant comment choisir judicieusement a et b afin que le polynome $Q(t, \dot{z})$, possède une solution en FPS. Il vient assez rapidement que $a = 1$, en effet on souhaite que $\frac{2(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^*$, mais surtout que $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}^*$ ce qui revient à dire que $a = 1$ car $pgcd(a, b) = 1$. Ainsi on obtient :

$$Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2(\frac{1}{b})^2 t^{2(1-b)} + t^b$$

Avant de continuer, il est important de transformer un peu notre polynome Q. Puisque $b > 1$, alors $2(1 - b) < 0$. On note

$$K(t, \dot{z}) = t^{2(b-1)} Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2(\frac{1}{b})^2 + t^{3b-2}$$

.

Maintenant on cherche à déterminer b, pour cela on utilise la même méthode que dans la section 1.6 de *An Introduction to Differential Algrbra*.

- Step 1 : differenciate K

$$\begin{aligned}
K &= \dot{z}^2/b^2 + t^{3b-2} & (1)\\
K' &= 2\dot{z}\ddot{z}/b^2 + (3b-2)t^{3b-3} & (2)\\
K'' &= 2(\ddot{z}^2 + \dot{z}z^{(3)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)t^{3b-4} & (3)\\
K^{(3)} &= 2(2\ddot{z}z^{(3)} + \ddot{z}z^{(3)} + \dot{z}z^{(4)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)t^{3b-5} & (4)\\
K^{(4)} &= 2(3(z^{(3)})^2 + 3\ddot{z}z^{(4)} + \ddot{z}z^{(4)} + \dot{z}z^{(5)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5)t^{3b-6} & (5)
\end{aligned}$$

- Step 2 : rename $z^{(i)}$ as z_i

$$\begin{aligned}
K &= z_1^2/b^2 + t^{3b-2} & (6)\\
K' &= 2z_1z_2/b^2 + (3b-2)t^{3b-3} & (7)\\
K'' &= 2(z_2^2 + z_1z_3)/b^2 + (3b-2)(3b-3)t^{3b-4} & (8)\\
K^{(3)} &= 2(2z_2z_3 + z_2z_3 + z_1z_4)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)t^{3b-5} & (9)\\
K^{(4)} &= 2(3(z_3)^2 + 3\ddot{z}z_4 + \ddot{z}z_4 + z_2z_5)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5)t^{3b-6} & (10)
\end{aligned}$$

- Step 3 : evaluate the polynomial at $t = 0$ and denote them k_i

$$\begin{aligned}
&k_0 \quad z_1^2/b^2 + 0^{3b-2} &= 0 \quad (11)\\
&k_1 \quad 2z_1z_2/b^2 + (3b-2)\cdot 0^{3b-3} &= 0 \quad (12)\\
&k_2 \quad 2(z_2^2 + z_1z_3)/b^2 + (3b-2)(3b-3)\cdot 0^{3b-4} &= 0 \quad (13)\\
&k_3 \quad 2(2z_2z_3 + z_2z_3 + z_1z_4)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)\cdot 0^{3b-5} &= 0 \quad (14)\\
&k_4 \quad 2(3(z_3)^2 + 3\ddot{z}z_4 + \ddot{z}z_4 + z_2z_5)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5)\cdot 0^{3b-6} &= 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

- Step 4 : "solve"

Le but est maintenant de déterminer la valeur de b en utilisant ses équations de tel sorte que les z_i soient non tous nuls, en effet cela reviendrait à dire qu'il existe une solution en FPS pour K.

Dans notre cas, la résolution de $k_0 = 0$ nous donne que $z_1 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. Il vient ensuite que $k_1 = 0$ car $b > 1$. Par la suite, on obtient que $z_2 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que $k_3 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. De même d'après k_4 on a $z_3 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. Et finalement en traitant k_4, on obtient que pour $b = 2$, $z_3^2 = 16$, et $z_3 = 0$ pour $b > 2$. Mais $b = 2$ n'est pas la seule valeur de b qui fonctionne, nous verrrons dans le chapitre 6 que tout b pair fonctionne. Cet exemple permet de voir comment les z_i sont tous nuls lorsque $b > 2$.

Un couple solution est donc $(a, b) = (1, 2)$, nous pouvons alors construire une solution pour K en utilisant la formule (8) de la partie 1.6 de *An Introduction to Differential Algrbra* , $\bar{z}(t) = z_0 + z_1 t + z_2 \frac{t^2}{2} + z_3 \frac{t^3}{3} + z_4 \frac{t^4}{4} + z_5 \frac{t^5}{5} + ...$ Il vient en prenant $z_3 = 4$, que $\bar{z}(t) = z_0 + \frac{2}{3}t^3$ et après changement de variable inverse, on obtient une solution pour le polynome P initial, $\bar{y}(x) = z_0 + \frac{2}{3}x^{3/2}$ avec $z_0 \in \mathbb{R}$, qui est bien la solution attendue.

On se demande maintenant s'il est possible de déterminer les valeurs de a et b de façon systématique et si oui comment. Le chapitre suivant aborde de façon plus formelle comment déterminer les valeurs possibles de a en utilisant des propriétés arithmétiques élémentaires.

5 Inférer sur les valeurs possible de a

Dans cette parties, on définies des régles de calculs et propriétés afin de déterminer les valeurs possibles de a du changement de variable $t = x^{a/b}$. Ces résultats seront utilisés pour l'implémentation d'un algorithme.

5.1 Hypothèses supplémentaires et propriétés imédiates

Puisque que le but de ce changement de variable est de passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux, $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$, alors si l'on considére le changement de varaible $t = x^{a/b}$, il faut que $b \nmid a$. Autrement, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = bk$, et alors on obtient $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x^k)^n$ qui est également une FPS, ce que l'on souhaite éviter. Ainsi lorsque l'on considére le couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il faut que $b \nmid a$, c'est-à-dire que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Cela implique que $b > 1$.

Aussi, remarquons qu'il est toujours possible de se ramenner à un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, tel que $pgcd(a, b) = 1$. En effet, supposons que $pgcd(a, b) = d$ ($\neq b$ d'après la remarque précédente), alors $\exists (a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $a = da'$et $b = db'$. d'où $t = x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{da'}{db'}} = x^{\frac{a'}{b'}}$.

Voici deux propriétés élémentaires qui seront utiles pour la suite :

Proposition 5.1. *Soit un couple* $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, tels que* $pgcd(a, b) = 1$*, alors* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^* \iff a \mid k$.

Démonstration. Il est évident que si $a \mid k$, alors $a \mid k(a - b)$. Supposons maintenant que $\frac{k(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^*$, alors $ka - kb \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow -kb \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow kb \equiv 0 \pmod{a}$. Donc $a \mid kb$, or $pgcd(a, b) = 1$, donc $a \mid k$, d'où le résultat.

□

Proposition 5.2. *Soit un couple* $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, tels que* $pgcd(a, b) = 1$*, alors* $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k(a-lb)}{a} \in \mathbb{Z}^* \iff a \mid lk$.